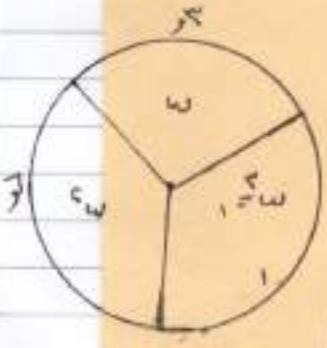
الجذور التكعيبية للواحد



خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح:

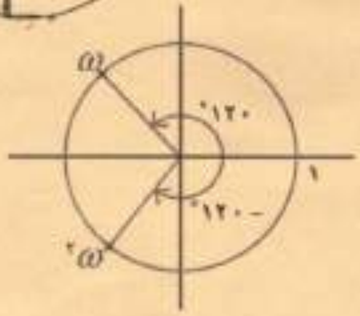
إذا كانت ١ ، ω ، ω^2 هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فإن

١- $1 + \omega + \omega^2 =$ صفر (مجموع الجذور = صفر)

$(1 + \omega = -\omega^2 \text{ ، } 1 + \omega^2 = -\omega \text{ ، } \omega + \omega^2 = -1)$

٢- $\omega^3 = 1$

$(\frac{1}{\omega} = \omega^2 \text{ ، } \frac{1}{\omega^2} = \omega)$



٣- الجذور التكعيبية للواحد الصحيح تقع على دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ١ وتكوّن رؤوس مثلث متساوي الأضلاع.

٤- $(\omega - \omega^2) = \pm\sqrt{3}$ ت ، $(\omega^2 - \omega) = \pm\sqrt{3}$ ت

$1 + \omega + \omega^2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}ت - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}ت = 0$

$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}ت \qquad \omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}ت$

مجموع أي جذرين للواحد الصحيح = − الجذر الثالث

$1 \times \omega \times \omega^2 = 1 \left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}ت\right]\left[-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}ت\right] = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

$\omega^3 = 1$

حاول أن تحل

(١) إذا كانت ١ ، ω ، $\omega^٢$ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح ، أوجد قيمة:

أ) $(٢ + ٥\omega + ٢\omega^٢)^٥$ ب) $(\omega + \frac{١}{\omega})^٢ (\omega^٢ + \frac{١}{\omega^٢})^٣$

أ) $(٢ + ٥\omega + ٢\omega^٢)^٥ = (٢ + ٢\omega + ٣\omega + ٢\omega^٢)^٥$

$= (٣\omega + ٢ + ٢\omega + ٢\omega^٢)^٥$

$= [٣\omega + ٢(١ + \omega + \omega^٢)]^٥$

$= (٣\omega + ٢ \times ٠)^٥ = (٣\omega)^٥$

$= ٣^٥ \times \omega^٥ = ٣^٥ \times \omega^٣ \times \omega^٢$

$= ٣^٥ \times ١ \times \omega^٢$

$= ٢٤٣\,\omega^٢$

ب) $(\omega + \frac{١}{\omega})^٢ (\omega^٢ + \frac{١}{\omega^٢})^٣ = (\omega + \omega^٢)^٢ (\omega^٢ + \omega)^٣$

$= (-\omega^٣)^٢ (-\omega^٣)^٣$

$= (-١)^٢ (-١)^٣$

$= ١ \times -١ = -١$

حاول أن تحل

(٢) أثبت أن: $\left[\dfrac{\text{أ} + \omega\,\text{ب} + \omega^2\,\text{جـ}}{\omega^2\,\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}\,\omega} - \dfrac{\text{جـ} + \text{أ}\,\omega^2 + \text{ب}\,\omega}{\omega\,\text{جـ} + \text{ب}\,\omega^2 + \text{أ}}\right]^8 = 81$

$$= \left[\frac{\omega^3\,\text{أ} + \omega\,\text{ب} + \omega^2\,\text{جـ}}{\omega^2\,\text{أ} + \text{ب} + \omega\,\text{جـ}} - \frac{\text{جـ} + \text{أ}\,\omega^2 + \text{ب}\,\omega}{\omega\,\text{جـ} + \text{ب}\,\omega^2 + \text{أ}\,\omega^3}\right]^8$$

$$= \left[\frac{\omega(\omega^2\,\text{أ} + \cancel{\text{ب}} + \omega\,\text{جـ})}{\omega^2\,\text{أ} + \cancel{\text{ب}} + \omega\,\text{جـ}} - \frac{\text{جـ} + \cancel{\text{أ}\,\omega^2} + \text{ب}\,\omega}{\omega(\text{جـ} + \cancel{\text{أ}\,\omega^2} + \text{ب}\,\omega)}\right]^8 = \left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)^8$$

$$= (\omega - \omega^2)^8 = (\pm\sqrt{3}\,\text{ت})^8 = (\pm\sqrt{3})^8\,(\text{ت})^8 = 81$$

حل آخر

$$\left[\frac{\text{أ} + \omega\,\text{ب} + \omega^2\,\text{جـ}}{\omega^2\,\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}\,\omega} - \frac{\text{جـ} + \text{أ}\,\omega^2 + \text{ب}\,\omega}{\text{جـ}\,\omega + \text{ب}\,\omega^2 + \text{أ}}\right]^8$$

$$\left[\frac{\text{أ}\,\omega^3 + \text{ب}\,\omega + \text{جـ}\,\omega^2}{\text{أ}\,\omega^2 + \text{ب} + \text{جـ}\,\omega} - \frac{\omega^3\,\text{جـ} + \text{أ}\,\omega^2 + \text{ب}\,\omega^4}{\text{جـ}\,\omega + \text{ب}\,\omega^2 + \text{أ}}\right]^8$$

$$\left[\frac{\omega\,[\text{أ}\,\omega^2 + \cancel{\text{ب}} + \text{جـ}\,\omega]}{\text{أ}\,\omega^2 + \cancel{\text{ب}} + \text{جـ}\,\omega} - \frac{\omega^2\,[\text{جـ}\,\omega + \cancel{\text{أ}} + \text{ب}\,\omega^2]}{\text{جـ}\,\omega + \cancel{\text{ب}\,\omega^2} + \text{أ}}\right]^8$$

$$(\omega - \omega^2)^8 = (\pm\sqrt{3}\,\text{ت})^8 = (\pm\sqrt{3})^8\,(\text{ت})^8$$

$$= 81$$

حاول أن تحل

(٢) كون المعادلة التربيعية التي جذراها $(١ + \omega - \omega^٢)^٣$ ، $(١ - \omega + \omega^٢)^٣$

$$(\underbrace{١ + \omega}_{-\omega^٢} - \omega^٢)^٣ = (-\omega^٢ - \omega^٢)^٣ = (-٢\omega^٢)^٣ = (-٢)^٣ (\omega)^٦$$

$$= -٨ (\omega^٣)^٢ = -٨ \times ١^٢ = -٨$$

$$(١ - \omega + \omega^٢)^٣ = (-\omega + \underbrace{١ + \omega^٢}_{= -\omega})^٣ = (-\omega - \omega)^٣ = (-٢\omega)^٣$$

$$= -٨\omega^٣$$

$$= -٨$$

∴ الجذران هما -٨ ، -٨

س^٢ − (مجموع الجذرين) س + حاصل ضرب الجذرين = ٠

مجموع الجذرين = $-٨ - ٨ = -١٦$

حاصل ضرب الجذرين = $-٨ \times -٨ = ٦٤$

∴ المعادلة

س^٢ − (-١٦) س + ٦٤ = ٠

س^٢ + ١٦ س + ٦٤ = ٠

تمارين (٢ - ٣)

إذا كان ١، ω، ω^2 هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح:

أكمل ما يأتي:

(١) $(2 + 5\omega + 2\omega^2)^2 = \text{.........}$

(٢) $(\omega - \omega^2)^4 = \text{.........}$

(٣) $(\omega + \frac{1}{\omega})^2(\omega^2 + \frac{1}{\omega^2})^2 = \text{.........}$

(٤) إذا كان $س = \frac{-1 + \sqrt{3}\,ت}{2}$ فإن $س^8 + س^4 = \text{.........}$

(١)
$$(2 + 5\omega + 2\omega^2)^2 = [2 + 5\omega + 2(-1 - \omega)]^2$$
$$= (2 + 5\omega - 2 - 2\omega)^2$$
$$= (3\omega)^2$$
$$= 9\omega^2$$

(٢)
$$(\omega - \omega^2)^4 = [\omega(1 - \omega)]^4 = \omega^4 (1 - \omega)^2 (1 - \omega)^2$$
$$(1 - \omega)^2 = 1 - 2\omega + \omega^2 = 1 - 2\omega + (-1 - \omega)$$
$$= 1 - 2\omega - 1 - \omega$$
$$(1 - \omega)^2 = -3\omega$$
$$\therefore \omega^4 \cdot (1 - \omega)^4 = \omega^4 (-3\omega)^2$$
$$= \omega^4 \times 9\omega^2$$
$$= 9\omega^6 = 9 \times (\omega^3)^2 = 9 \times 1$$
$$= 9$$

(٣)
$$(\omega + \frac{1}{\omega})^2(\omega^2 + \frac{1}{\omega^2})^2 = (\omega + \omega^2)^2(\omega^2 + \omega)^2$$
$$= (-1)^2 (-1)^2$$
$$= 1 \times 1$$
$$= 1$$

(٤)
$$س = \frac{-1 + \sqrt{3}\,ت}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}ت = \omega \quad \therefore س = \omega$$
$$س^8 + س^4 = (\omega)^8 + \omega^4 = \omega^6 \cdot \omega^2 + \omega^3 \cdot \omega = \omega^2 + \omega = -1$$

(٥) $\left(\frac{1}{\omega+2}\right)\left(1+\omega-\frac{3}{\omega}\right)=$ ________ (٦) $1+3\omega+3\omega^2=$ ________

(٧) إذا كان أ $=3\omega-3\omega^2$ ، ب $=2+5\omega^2$ فإن أ^2 + ب^2 = ________

(٨) $\sum \omega^{r}=$ ________

(٥) $\left(\frac{1}{\omega+2}\right)\left(1+\omega-\frac{3}{\omega}\right)=\left(\frac{1}{\omega+2}\right)\left(1+\omega-3\omega^2\right)$

$=\left(\frac{1}{\omega+2}\right)\left(-\omega^2-3\omega^2\right)$

$=\frac{-4\omega^2}{\omega+2}\times\frac{\omega}{\omega}=\frac{-4\omega^3}{\omega^2+2\omega}=\frac{-4}{-1-\omega+2\omega}=\frac{-4}{\omega-1}$

الحل في كتاب الوزارة = ٤ وهذا لا يتأتى إلا إذا كانت
[illegible] له مع الشكل التالي

$\left(\frac{-1}{\omega^2}\right)\left(1+\omega-\frac{3}{\omega}\right)=(-\omega)\left(1+\omega-3\omega^2\right)$

$=(-\omega)\left(-\omega^2-3\omega^2\right)$

$=(-\omega)\left(-4\omega^2\right)$

$=4\omega^3$

$=4$

(٦) $1+3\omega+3\omega^2=1+3\left(\omega+\omega^2\right)$

$=1+3(-1)$

$=1-3$

$=-2$

(ب) $م = ٢\omega - ٣\omega^{٢}$ ، $ن = ٣ + ٥\omega^{٢}$ ، $م^{٢} + ن^{٢} = ؟؟$

$م = ٢\omega - ٣\omega^{٢} = ٢\omega - ٣(-١-\omega) = ٢\omega + ٣ + ٣\omega$

$= ٥\omega + ٣$

$\therefore م^{٢} = (٥\omega + ٣)^{٢} = ٢٥\omega^{٢} + ٣٠\omega + ٩$

$ن = ٣ + ٥\omega^{٢}$ $\therefore ن^{٢} = ٩ + ٢٥\omega^{٤} + ٣٠\omega^{٢}$

$م^{٢} + ن^{٢} = ٢٥\omega^{٢} + ٣٠\omega + ٩ + ٩ + ٢٥\omega^{٤} + ٣٠\omega^{٢}$

$= ٢٥(-\omega-١) + ٣٠\omega + ١٨ + ٢٥\omega + ٣٠(-١-\omega)$

$= -٢٥ - \cancel{٢٥\omega} + ٣٠\omega + ١٨ + \cancel{٢٥\omega} - ٣٠ - ٣٠\omega$

$= -٢٥ + ١٨ - ٣٠$

$= -٧ - ٣٠$

$= -٣٧$

(٨) $\sum_{ر=١}^{٥} \omega^{ر} = \omega^{١} + \omega^{٢} + \omega^{٣} + \omega^{٤} + \omega^{٥}$

$= \omega + \omega^{٢} + ١ + \omega + \omega^{٢}$

$= ١ + ٢\omega + ٢\omega^{٢}$

$= ١ + ٢(\omega + \omega^{٢})$

$= ١ + ٢(-١)$

$= ١ - ٢$

$= -١$

(٩)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(٩) مرافق العدد ω يساوي

(أ) ω (ب) $\omega^{٢}$ (ج) ١ (د) $-\omega$

$\omega = -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

$\omega^{٢} = -\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

∴ $\omega^{٢}$ هو مرافق ω

(١٠)

(١٠) $(\omega^{٢} + \frac{١}{\omega})(١ + \frac{١}{\omega^{٢}})^{٢} =$

(أ) ٢ (ب) صفر (ج) -٣ (د) -٥

$(\omega^{٢} + \frac{١}{\omega})(١ + \frac{١}{\omega^{٢}})^{٢} = (\omega^{٢} + \omega^{٢})(١ + \omega)^{٢}$

$= (٢\omega^{٢})(-\omega^{٢})^{٢}$

$= ٢\omega^{٢}\omega^{٤}$

$= ٢\omega^{٢}\omega^{٣}\omega = ٢\omega^{٢} \times ١ \times \omega$

$= ٢\omega^{٢}\omega$

$= ٢\omega^{٣} = ٢ \times ١$

$= ٢$

(١١)

(١١) $(\text{أ} - \text{ب}\,\omega + \text{أ}\,\omega^2)(\text{أ} + \text{ب}\,\omega^2 + \text{أ}\,\omega^4) =$

أ) ١ ب) ١ - ب ج) $(\text{أ} - \text{ب})^2$ د) $\text{ب}^2 - \text{أ}^2$

$= (\text{أ} + \text{ب}\,\omega + \text{أ}\,\omega^2)(\text{أ} + \text{ب}\,\omega^2 + \text{أ}\,\omega^4)$

$= (\text{أ} + \text{أ}\,\omega^2 + \text{ب}\,\omega)(\text{أ} + \text{ب}\,\omega^2 + \text{أ}\,\omega)$

$= [\text{أ}(1 + \omega^2) + \text{ب}\,\omega][\text{أ}(1 + \omega) + \text{ب}\,\omega^2]$

$= [\text{أ}(-\omega) + \text{ب}\,\omega][\text{أ}(-\omega^2) + \text{ب}\,\omega^2]$

$= [\omega(-\text{أ} + \text{ب})][\omega^2[-\text{أ} + \text{ب}]]$

$= [\omega(\text{ب} - \text{أ})][\omega^2(\text{ب} - \text{أ})]$

$= [-\omega(\text{أ} - \text{ب})][-\omega^2(\text{أ} - \text{ب})]$

$= \omega^3(\text{أ} - \text{ب})^2 = (\text{أ} - \text{ب})^2$

(١٢)

(١٢) $(1 + 2\omega^5 + \frac{1}{\omega^2})(1 + 2\omega + \frac{1}{\omega^4}) =$

أ) صفر ب) ١ ج) -١ د) ٢

$(1 + 2\omega^5 + \frac{1}{\omega^2})(1 + 2\omega + \frac{1}{\omega^4})$

$(1 + 2\omega^3\omega^2 + \omega)(1 + 2\omega + \frac{1}{\omega^3\omega})$

$(1 + 2\omega^2 + \omega)(1 + 2\omega + \frac{1}{\omega})$

$(1 + \omega + 2\omega^2)(1 + 2\omega + \omega^2)$

$(-\omega^2 + 2\omega^2)(-\omega + 2\omega)$

$(\omega^2)(\omega)$

$(\omega^2)(\omega) = \omega^3 = 1$

(١٣)

١٣) $\frac{1 - \omega\,\text{ي}}{\omega^2 - \text{ي}} - \omega^2 =$

(أ) ٣ت (ب) $\pm\sqrt{3}$ ت (ج) ٣٠ (د) ٣

$$\frac{\text{أ} - \omega\,\text{ي}}{\text{أ}\,\omega^2 - \text{ي}} - \omega^2 = \frac{\text{أ}\,\omega^3 - \omega\,\text{ي}}{\text{أ}\,\omega^2 - \text{ي}} - \omega^2 = \frac{\omega(\text{أ}\,\omega^2 - \text{ي})}{\text{أ}\,\omega^2 - \text{ي}} - \omega^2$$

$$= \omega - \omega^2 = \pm\sqrt{3}\ \text{ت}$$

(١٤)

١٤) إذا كان $(1 + \omega)^7 = \text{أ} + \text{ب}\,\omega$ حيث أ، ب عددان حقيقيان فإن (أ، ب) =

(أ) (٠، −١) (ب) (١، ١) (ج) (١، ٠) (د) (−١، ١)

$1 + \omega = -\omega^2$

$(1 + \omega)^7 = \text{أ} + \text{ب}\,\omega$

$(-\omega^2)^7 = \text{أ} + \text{ب}\,\omega$

$-\omega^{14} = \text{أ} + \text{ب}\,\omega$

$-\omega^{12} \cdot \omega^2 = \text{أ} + \text{ب}\,\omega$

$-(\omega^3)^4 \cdot \omega^2 = \text{أ} + \text{ب}\,\omega$

$-\omega^2 = \text{أ} + \text{ب}\,\omega$

$1 + \omega = \text{أ} + \text{ب}\,\omega$

$\text{أ} = 1 \qquad \text{ب} = 1$

$\therefore (\text{أ}، \text{ب}) = (1، 1)$

(١٥) إذا كان $(1-\omega)^{\text{ن}} = (1+\omega^2)^{\text{ن}}$ فإن أقل قيمة لـ ن الصحيحة الموجبة هي

أ ٢ — ب ٣ — ج ٤ — د ٦

$$(1-\omega)^{\text{ن}} = (1+\omega^2)^{\text{ن}}$$

$1+\omega = -\omega^2$

$1+\omega^2 = -\omega$

$$(-\omega^2)^{\text{ن}} = (-\omega)^{\text{ن}}$$

$$\cancel{(-1)^{\text{ن}}}(\omega^2)^{\text{ن}} = \cancel{(-1)^{\text{ن}}}(\omega)^{\text{ن}}$$

$$(\omega^2)^{\text{ن}} = (\omega)^{\text{ن}}$$

$$\omega^{2\text{ن}} = \omega^{\text{ن}}$$

$$\omega^{\text{ن}} \cdot \cancel{\omega^{\text{ن}}} = \cancel{\omega^{\text{ن}}}$$

$$\omega^{\text{ن}} = 1$$

$$\therefore \omega^3 = 1$$

∴ أقل قيمة صحيحة لـ ن هي ٣

(١٦) $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \dots + \omega^{100} =$

أ صفر — ب ١ — ج ω — د $-\omega^2$

$$1 + \underbrace{(\omega+\omega^2+\omega^3)}_{\text{صفر}} + \underbrace{(\omega^4+\omega^5+\omega^6)}_{\text{صفر}} + \underbrace{(\omega^7+\omega^8+\omega^9)}_{\text{صفر}} + \dots\dots + \underbrace{(\omega^{97}+\omega^{98}+\omega^{99})}_{\text{صفر}} + \omega^{100}$$

$$= 1 + \omega^{100} = 1 + \omega(\omega^3)^{33} = 1 + \omega = -\omega^2$$

(١٨)

(١٨) $\sum_{ر=١}^{٦} (١ + \omega^{ر}) =$

(أ) صفر (ب) ٦ (ج) ١ (د) $\omega + ١$

$$\sum_{ر=١}^{٦} ١ + \omega^{ر} = (١+\omega) + (١+\omega^{٢}) + (١+\omega^{٣}) + (١+\omega^{٤}) + (١+\omega^{٥}) + (١+\omega^{٦})$$

$$= ٦ + (\omega + \omega^{٢} + \omega^{٣} + \omega^{٤} + \omega^{٥} + \omega^{٦})$$

$$٦ + (-١ + ١ + \omega^{٣}\omega + \omega^{٣}\omega^{٢} + (\omega^{٣})^{٢})$$

$$٦ + (-١ + ١ + \omega + \omega^{٢} + ١)$$

$$٦ + (-١ + ١ - ١ + ١)$$

$$٦ + \text{صفر} = ٦$$

$$\therefore \sum_{ر=١}^{٦} ١ + \omega^{ر} = ٦$$

(١٩) أثبت صحة المتطابقات الآتية:

أ) $(1-\omega+\omega^{2})(1-\omega^{2}+\omega^{4})(1-\omega^{4}+\omega^{8})(1-\omega^{8}+\omega^{16}) = 2^{4}$

ب) $\left(\frac{\omega}{1+2\omega}\right)^{2}+\left(\frac{1+2\omega^{2}}{\omega^{2}}\right)^{2} = \frac{-10}{3}\omega^{2}$

ج) $\left[\frac{1}{1+\omega ت}-\frac{\omega+ت}{1+\omega^{2}ت}\right]^{8} = 16$

د) $\left[\frac{4-3\omega^{2}}{5\omega-3}-\frac{3-7\omega}{3\omega^{2}-7}\right]^{2} = -3$

هـ) $(1+\omega^{2})^{8} = \omega^{2}$

و) $(1-\omega^{2}+\omega^{4})^{2}+(1+\omega^{2}+\omega^{4})^{2} = 4\omega$

(أ) $(1-\omega+\omega^{2})(1-\omega^{2}+\omega^{4})(1-\omega^{4}+\omega^{8})(1-\omega^{8}+\omega^{16}) = 2^{4}$

$(1-\omega+\omega^{2})(1-\omega^{2}+\omega^{3}\omega)(1-\omega^{3}\omega+\omega^{6}\omega^{2})(1-\omega^{6}\omega^{2}+\omega^{15}\omega) = 2^{4}$

$(1-\omega+\omega^{2})(1-\omega^{2}+\omega)(1-\omega+\omega^{2})(-\omega-\omega) = 2^{4}$

$(-\omega-\omega)(-\omega^{2}-\omega^{2})(-\omega-\omega)(-\omega^{2}-\omega^{2}) = 2^{4}$

$(-2\omega)(-2\omega^{2})(-2\omega)(-2\omega^{2}) = 2^{4}$

$(-2)^{4}(\omega)^{6} = 2^{4}(1)(\omega)^{6} = 2^{4}$

ب) $\left(\frac{\omega}{1+2\omega}\right)^{2}+\left(\frac{1+2\omega^{2}}{\omega^{2}}\right)^{2} = \frac{-10}{3}\omega^{2}$

$$\frac{(\omega)^{2}}{(1+2\omega)^{2}}+\frac{(1+2\omega^{2})^{2}}{(\omega^{2})^{2}} = \frac{\omega^{2}}{1+4\omega+4\omega^{2}}+\frac{1+4\omega^{2}+4\omega^{4}}{\omega^{4}}$$

$$= \frac{\omega^{2}}{1+4(\omega+\omega^{2})}+\frac{1+4(\omega^{2}+\omega^{3}\omega)}{\omega^{4}}$$

$$= \frac{\omega^{2}}{1-4}+\frac{1+4(-1)}{\omega^{3}\omega} = \frac{\omega^{2}}{-3}+\frac{-3}{\omega}$$

$$= \frac{\omega^{3}+9}{-3\omega} = \frac{1+9}{-3\omega} = \frac{10}{-3\omega} \qquad \text{بالضرب} \times \frac{\omega^{2}}{\omega^{2}}$$

$$= \frac{10}{-3\omega}\times\frac{\omega^{2}}{\omega^{2}} = \frac{10\omega^{2}}{-3\omega^{3}} = -\frac{10\omega^{2}}{3}$$

(هـ) $\left[\frac{1}{1+\omega\text{ت}} - \frac{\text{ت}+\omega}{1+\omega^2\text{ت}}\right]^{8} = 16$

$\frac{1}{1+\omega\text{ت}} - \frac{\text{ت}+\omega}{1+\omega^2\text{ت}} = \frac{1+\omega^2\text{ت} - (\text{ت}+\omega)(1+\omega\text{ت})}{(1+\omega\text{ت})(1+\omega^2\text{ت})}$

$= \frac{1+\omega^2\text{ت} - (\omega+\omega^2\text{ت}+\text{ت}+\omega\text{ت}^2)}{1+\omega^2\text{ت}+\omega\text{ت}+\omega^3\text{ت}^2} = \frac{1+\omega^2\text{ت} - \text{ت}(\omega+\omega^2)-\omega}{1+\text{ت}(\omega+\omega^2)-\omega^3}$

$= \frac{1+\omega^2\text{ت} - \omega - \omega^2\text{ت} - \omega\text{ت} - \text{ت}}{1+\text{ت}(\omega+\omega^2)-\omega^3}$

$= \frac{1+\omega^2\text{ت} - \cancel{\omega} + \omega^2\text{ت} + \cancel{\omega} + \text{ت}}{1+\text{ت}(-1)-1} = \frac{1+\omega^2\text{ت} - \text{ت}(\omega^2+1)}{-\text{ت}}$

$= \frac{1+\omega^2\text{ت} - \text{ت}(-\omega)}{-\text{ت}} = \frac{1+\omega^2\text{ت}+\text{ت}\omega}{-\text{ت}}$

$= \frac{1+\text{ت}(\omega^2+\omega)}{-\text{ت}} = \frac{1+\text{ت}(-1)}{-\text{ت}} = \frac{1-\text{ت}}{-\text{ت}}$

$= \frac{1-\text{ت}}{-\text{ت}} \times \frac{\text{ت}}{\text{ت}} = \frac{\text{ت}(1-\text{ت})}{-\text{ت}^2} = \frac{\text{ت}-\text{ت}^2}{1} = \text{ت}+1$

$\therefore \left[\frac{1}{1+\omega\text{ت}} - \frac{\text{ت}+\omega}{1+\omega^2\text{ت}}\right]^{8} = (1+\text{ت})^{8}$

$(1+\text{ت})^{8} = \left[(1+\text{ت})^2\right]^{4} = (1+2\text{ت}+\text{ت}^2)^{4}$

$= (1+2\text{ت}-1)^{4} = (2\text{ت})^{4}$

$= (2)^4(\text{ت})^4 = 16\times 1 = 16$

وهو المطلوب

تابع ١٩

(د) $\left[\frac{٥-٣\omega^٢}{٥\omega-٣} - \frac{٢-٧\omega}{٢\omega^٢-٧}\right]^٢ = -٣$

$$\left[\frac{٥-٣\omega^٢}{٥\omega-٣} - \frac{٢-٧\omega}{٢\omega^٢-٧}\right]^٢ = \left[\frac{٥\omega^٣-٣\omega^٢}{٥\omega-٣} - \frac{٢\omega^٣-٧\omega}{٢\omega^٢-٧}\right]^٢$$

$$= \left[\frac{\omega^٢(\cancel{٥\omega-٣})}{\cancel{٥\omega-٣}} - \frac{\cancel{٢-٧\omega}}{\omega^٢(\cancel{٢-٧\omega})}\right]^٢$$

$$= \left[\frac{\omega^٢}{١} - \frac{١}{\omega^٢}\right]^٢ = \left[\omega^٢ - \frac{١}{\omega^٢}\right]^٢$$

$$= \left[\omega^٢ - \omega\right]^٢ = \left[\pm\sqrt{٣}\,ت\right]^٢ = ٣ت^٢ = -٣$$

هـ) $(١+\omega^٢)^٨ = \omega^٢$

$$(-\omega)^٨ = (-١)^٨ \cdot \omega^٨ = (-١)^٨ \cdot \omega^٦ \cdot \omega^٢$$
$$= ١ \times ١ \times \omega^٢$$
$$= \omega^٢$$

تابع ١٩

(هـ) $(١ - \omega^{٢} + \omega^{٤})^{٢} + (١ + \omega^{٢} + \omega^{٤})^{٢} = ٤\omega$

$(١ - \omega^{٢} + \omega^{٤})^{٢} = (١ - \omega^{٢} + \omega^{٣}\cdot\omega)^{٢} = (١ - \omega^{٢} + \omega)^{٢} = (١ + \omega - \omega^{٢})^{٢}$

$= (-\omega^{٢} - \omega^{٢})^{٢} = (-٢\omega^{٢})^{٢} = ٤\omega^{٤} = ٤\omega^{٣}\omega = ٤\omega$

$(١ + \omega^{٢} + \omega^{٤})^{٢} = (١ + \omega^{٢} + \omega^{٣}\omega)^{٢} = (١ + \omega^{٢} + \omega)^{٢} = (\text{صفر})^{٢} = \text{صفر}$

$\therefore (١ - \omega^{٢} + \omega^{٤})^{٢} + (١ + \omega^{٢} + \omega^{٤})^{٢} = ٤\omega + \text{صفر} = ٤\omega$

وهو المطلوب

(٢٠)

(٢٠) أوجد قيمة كل مما يأتي:

أ) $5 + 3\omega + 3\omega^2 = ?$

ب) $(1 + \omega + 2\omega^2)^2 + (1 + 2\omega + \omega^2)^2$

ج) $\dfrac{\omega^2(\omega - 1)(\omega^2 - 1)}{(2\omega + 1)(\omega^2 + 2)}$

د) $\left[\dfrac{1}{1 + 2\omega^2} - \dfrac{1}{1 + 2\omega}\right]^2$

هـ) $(1 + \dfrac{1}{\omega} + ت)(1 + \dfrac{1}{\omega^2} + ت)$

أ) $5 + 3\omega + 3\omega^2 = 5 + 3(\omega + \omega^2) = 5 + 3(-1) = 5 - 3 = 2$

$\therefore 5 + 3\omega + 3\omega^2 = 2$

$\omega + \omega^2 = -1$

$1 + \omega = -\omega^2$

$1 + \omega^2 = -\omega$

ب) $= (1 + \omega + 2\omega^2)^2 + (1 + 2\omega + \omega^2)^2$

$(-\omega^2 + 2\omega^2)^2 + (-\omega + 2\omega)^2$

$(\omega^2)^2 + (\omega)^2$

$\omega^4 + \omega^2 = \omega^3 \cdot \omega + \omega^2 = \omega + \omega^2 = -1$

ج) $\dfrac{\omega^2(\omega - 1)(\omega^2 - 1)}{(2\omega + 1)(\omega^2 + 2)} = \dfrac{\omega^2(-1 - \omega^2)(-1 - \omega - 1)}{(2\omega + 1)(\omega^2 + 2)} = \dfrac{\omega^2[-(1 + \omega^2)}{}$

$= \dfrac{\omega^2(-2 - \omega^2)(-2 - \omega)}{(2\omega + 1)(\omega^2 + 2)} = \dfrac{\omega^2[-(\cancel{2 + \omega^2})][-(2 + \omega)]}{(\cancel{2 + \omega^2})(2\omega + 1)}$

$= \dfrac{\omega^2(2 + \omega)}{(2\omega + 1)} = \dfrac{2\omega^2 + \omega^3}{2\omega + 1} = \dfrac{2\omega^2 + 1}{2\omega + 1} = \dfrac{\omega^2 + \omega^2 + 1}{2\omega + 1}$

$= \dfrac{-\omega + \omega^2}{2\omega + 1} = \dfrac{-\omega + \omega^2}{\omega + \omega + 1} = \dfrac{-\omega + \omega^2}{-\omega^2 + \omega}$

$= \dfrac{-(\omega - \omega^2)}{(\omega - \omega^2)} = -1$

تابع (٢٠)

(د) $\left[\frac{1}{1+3\omega^{2}}-\frac{1}{1+3\omega}\right]^{2}$ توحيد المقامات

$$=\left[\frac{(1+3\omega)-(1+3\omega^{2})}{(1+3\omega)(1+3\omega^{2})}\right]^{2}=\left[\frac{1+3\omega-1-3\omega^{2}}{(1+3\omega)(1+3\omega^{2})}\right]^{2}=\left[\frac{3(\omega-\omega^{2})}{(1+3\omega)(1+3\omega^{2})}\right]^{2}$$

$\because\ \omega-\omega^{2}=\pm\sqrt{3}\,\text{ت}$

$$=\frac{\left[3(\pm\sqrt{3}\,\text{ت})\right]^{2}}{(1+3\omega+3\omega^{2}+9\omega^{3})^{2}}=\frac{9\times 3\times \text{ت}^{2}}{(1+3(\omega+\omega^{2})+9)^{2}}=\frac{-27}{(1-3+9)^{2}}=\frac{-27}{(7)^{2}}$$

$$=\frac{-27}{49}$$

(هـ) $\left(1+\frac{1}{\omega}+\text{ت}\right)\left(1+\frac{1}{\omega^{2}}+\text{ت}\right)=(1+\omega^{2}+\text{ت})(1+\omega+\text{ت})$

$$=(-\omega+\text{ت})(-\omega^{2}+\text{ت})$$
$$=\omega^{3}-\omega\,\text{ت}-\omega^{2}\,\text{ت}+\text{ت}^{2}$$
$$=\omega^{3}-\text{ت}(\omega+\omega^{2})+\text{ت}^{2}$$
$$=1-\text{ت}(-1)-1$$
$$=-\text{ت}(-1)=\text{ت}$$

(٢١) إذا كان س = $\frac{-١ + \sqrt{٣}\,ت}{٢}$ أثبت أن س^٦ + ٦س^٥ + ١٥س^٤ + ٢٠س^٣ + ١٥س^٢ + ٦س = ٠.

$\frac{-١ + \sqrt{٣}\,ت}{٢} = \frac{-١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت = \omega =$ س

من نظرية ذات الحدين

س^٦ + ٦س^٥ + ١٥س^٤ + ٢٠س^٣ + ١٥س^٢ + ٦س + ١ = (س + ١)^٦

∴ س^٦ + ٦س^٥ + ١٥س^٤ + ٢٠س^٣ + ١٥س^٢ + ٦س = (س + ١)^٦ − ١

(س + ١)^٦ − ١ = $(\omega + ١)^٦ - ١ = (-\omega^٢)^٦ - ١ = \omega^{١٢} - ١ = (\omega^٣)^٤ - ١$

$= ١ - ١ = ٠$

نفرض أن س = $\omega^٢$

س^٦ + ٦س^٥ + ١٥س^٤ + ٢٠س^٣ + ١٥س^٢ + ٦س = (س + ١)^٦ − ١

$(\omega^٢ + ١)^٦ - ١ = (-\omega)^٦ - ١ = (\omega^٣)^٢ - ١ = ١^٢ - ١ =$ صفر

يتضح من الحل السابق أن التعويض في المقدار عندما س = ω
وتكون مسألة طويلة جداً وعرضة للخطأ في الاختصار.

(٢٢) إذا كان $\frac{1}{\omega+1}$ ، $\frac{1}{\omega^2+1}$ هما جذرا معادلة تربيعية، فأوجد المعادلة.

نفرض أن الجذر الأول هو ل $= \frac{1}{\omega+1} = \frac{1}{-\omega^2} = -\omega$

نفرض أن الجذر الثاني هو م $= \frac{1}{\omega^2+1} = \frac{1}{-\omega} = -\omega^2$

المعادلة

س² − (مجموع الجذرين) س + حاصل ضرب الجذرين = صفر

س² − (ل + م) س + ل·م = ٠

س² − $(-\omega - \omega^2)$ س + $(-\omega \cdot -\omega^2)$ = ٠

س² − [1+] س + $(\omega^3 + 1)$ = صفر

س² − س + ١ = ٠

∴ المعادلة هي

س² − س + ١ = ٠

(٢٢) إذا كان ع = ٢ $(\omega + ت)(\omega^2 + ت)$ أوجد الصور المختلفة للعدد ع، ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع في الصورة المثلثية.

$ع = ٢(\omega + ت)(\omega^٢ + ت)$

$= ٢[\omega\,\omega^٢ + \omega\,ت + ت\,\omega^٢ + ت^٢]$

$= ٢[\omega^٣ + \omega\,ت + ت\,\omega^٢ - ١]$

$= ٢[١ + ت(\omega + \omega^٢) - ١]$

$= ٢[١ + ت(-١) - ١]$

$= ٢(-ت)$

$ع = -٢ت$ س = ٠ ص = −٢

∴ العدد يقع على محور الصادات السالب

$ل = \sqrt{(٠)^٢ + (-٢)^٢} = ٢$ $\theta = \frac{-ط}{٢}$

$ع = ٢(جتا \frac{-ط}{٢} + ت جا \frac{-ط}{٢}) = ٢ هـ^{\frac{-ط}{٢}ت}$

$\therefore ع^{\frac{١}{٢}} = (٢)^{\frac{١}{٢}} (جتا \frac{-ط}{٢} + ت جا \frac{-ط}{٢})^{\frac{١}{٢}}$

$ع^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٢}\,(جتا \frac{١}{٢}(\frac{-ط}{٢} + ٢ط ر) + ت جا \frac{١}{٢}(\frac{-ط}{٢} + ٢ط ر))$

عندما ر = ٠ ، $ع_١ = (جتا \frac{-ط}{٤} + ت جا \frac{-ط}{٤})\sqrt{٢}$

عندما ر = ١ ، $ع_٢ = \sqrt{٢}\,(جتا \frac{٣ط}{٤} + ت جا \frac{٣ط}{٤})$

(٢٤)

٢٤ **تفكير ابداعي:** أوجد قيم ن التي تجعل $(٢ + ٥\omega + ٢\omega^٢)^ن = (٢ + ٢\omega + ٥\omega^٢)^ن$

$$(٢ + ٥\omega + ٢\omega^٢)^ن = (٢ + ٥\omega^٢ + ٢\omega)^ن$$

$$(٢ + ٢\omega + ٣\omega + ٢\omega^٢)^ن = (٢ + ٢\omega^٢ + ٣\omega^٢ + ٢\omega)^ن$$

$$[٣\omega + ٢(١ + \omega + \omega^٢)]^ن = [٣\omega^٢ + ٢(\omega + \omega^٢ + ١)]^ن$$

$$[٣\omega + ٢\times ٠]^ن = [٣\omega^٢ + ٢\times ٠]^ن$$

$$(٣\omega)^ن = (٣\omega^٢)^ن$$

$$\cancel{٣^ن}\,\omega^ن = ٣^ن\,\omega^{٢ن}$$

$$\omega^ن = \omega^{٢ن}$$

عندما ن = ٠ : $\omega^٠ = \omega^{٢\times ٠} = ١$

عند ن = ٣ : $\omega^٣ = \omega^٦ \Leftarrow \omega^٣ = (\omega^٣)^٢ = ١$

عند ن = ٦ : $\omega^٦ = \omega^{١٢} \Leftarrow (\omega^٣)^٢ = (\omega^٣)^٤ = ١$

$\therefore$ ن = ٣ك حيث ك $\in$ ص

(٢٥) أوجد: (أ) $\sum_{ر=\text{صفر}}^{١٠} \omega^{ر}$ (ب) $\sum_{ر=\text{صفر}}^{١٠} (١ + \omega^{ر} + \omega^{٢ر})$

(أ) $ح = \omega^{٠} + \omega^{١} + \omega^{٢} + \omega^{٣} + \dots + \omega^{١٠}$

$= \underbrace{١ + \omega + \omega^{٢}}_{\text{صفر}} + \omega^{٣} + \dots + \underbrace{\omega^{٧} + \omega^{٨} + \omega^{٩}}_{\text{صفر}} + \omega^{١٠}$

$= ١ + \omega^{١٠} = ١ + \omega^{٩}.\omega = ١ + (\omega^{٣})^{٣}\omega = ١ + \omega = -\omega^{٢}$

(ب) $ر = ٠$ $١ + \omega^{٠} + \omega^{٢\times٠} = ١ + ١ + ١ = ٣$

$ر = ١$ $١ + \omega^{١} + \omega^{٢} = \text{صفر}$

$ر = ٢$ $١ + \omega^{٢} + \omega^{٤} = ١ + \omega^{٢} + \omega^{٣}.\omega = ١ + \omega^{٢} + \omega = \text{صفر}$

* $ر = ٣$ $١ + \omega^{٣} + \omega^{٦} = ١ + ١ + (\omega^{٣})^{٢} = ٣$

$ر = ٤$ $١ + \omega^{٤} + \omega^{٨} = ١ + \omega^{٣}.\omega + (\omega^{٣})^{٢}.\omega^{٢} = ١ + \omega + \omega^{٢} = \text{صفر}$

$ر = ٥$ $١ + \omega^{٥} + \omega^{١٠} = ١ + \omega^{٣}.\omega^{٢} + (\omega^{٣})^{٣}\omega = ١ + \omega^{٢} + \omega = \text{صفر}$

* $ر = ٦$ $١ + \omega^{٦} + \omega^{١٢} = ١ + (\omega^{٣})^{٢} + (\omega^{٣})^{٤} = ٣$

$ر = ٧$ $١ + \omega^{٧} + \omega^{١٤} = ١ + \omega^{٦}.\omega + \omega^{١٢}\omega^{٢} = ١ + \omega + \omega^{٢} = \text{صفر}$

$ر = ٨$ $١ + \omega^{٨} + \omega^{١٦} = ١ + \omega^{٦}.\omega^{٢} + \omega^{١٥}.\omega = ١ + \omega + \omega^{٢} = \text{صفر}$

* $ر = ٩$ $١ + \omega^{٩} + \omega^{١٨} = ١ + (\omega^{٣})^{٣} + (\omega^{٣})^{٦} = ٣$

$ر = ١٠$ $١ + \omega^{١٠} + \omega^{٢٠} = ١ + \omega^{٩}.\omega + \omega^{١٨}\omega^{٢} = ١ + \omega + \omega^{٢} = \text{صفر}$

$\therefore \sum_{ر=٠}^{١٠} (١ + \omega^{ر} + \omega^{٢ر}) = ١٢$